Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\ln|x|), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'.

b) Zeigen Sie, dass f in $]0,1[$ und in $]1,\infty[$ jeweils unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 3:
Sei $a, b \in\,]0,1[$. Zeigen Sie, dass

$$a^x + b^x = 1$$

genau eine Lösung x im Intervall $]0,\infty[$ hat.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{xy}.$$

a) Zeigen Sie, dass f keine kritischen Punkte besitzt.

b) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f auf dem Kreis

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$$

Aufgabe 5:
a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = e^{x-y}, \quad y(0) = \ln(2)$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungsfunktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für die Lösungsfunktion ϕ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x), \quad \lim_{x\to\infty} (\phi(x) - x)$$

und skizzieren Sie den Graphen G_ϕ von ϕ.