

**Thema Nr. 3**  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{3^n} \right)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - \sqrt{6+5x}}{\ln(x-1)} \right)$$

**Aufgabe 2:**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{3x}{x^2+2} \right)^k.$$

Bestimmen Sie die Menge  $D$  aller  $x \in \mathbb{R}$ , für die die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, sowie die Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 3:**

Die Funktion  $f : ]-e, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $e$ , der Eulerschen Zahl) sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x-e}{x+e}.$$

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse im Bereich von  $x=0$  bis  $x=3e$  eingeschlossen wird, den Wert  $e$  hat.

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 26x + 15$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen  $y$  dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung  $y$  mit

$$y(0) = y'(0) = 0.$$