

**Thema Nr. 1**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ , wobei  $1 < r < \infty$  sei.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

wobei  $c_n = a_n^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  sei.

**Aufgabe 2:**

Sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = x \cdot \sin(x).$$

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

b) Geben Sie an, in welchen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  die Stammfunktion  $F$  lokale Extrema hat, und ob es sich dabei jeweils um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

**Aufgabe 3:**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

a) Man zeige, dass  $f$  streng monoton wächst.

b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  besitzt  $f$  lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}?$$

(c) Man berechne

$$g' \left( \frac{1}{2} \right).$$

**Aufgabe 4:**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit

$$f(0) = -3$$

und

$$1 < f'(x) < 2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  im Intervall  $]1, 3]$  eine Nullstelle besitzt.

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy' + 3y - 5x^2 = 0$$

auf  $]0, \infty[$ .