Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(\alpha + n\pi))^n x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

den Wert $f_\alpha(1)$.

Aufgabe 2:
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln(x^2 + (y-1)^2 + 1).$$

a) Bestimmen Sie für $c = 0$, $c = 1$ und $c = \ln(4)$ die Menge der Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f den Wert c annimmt und skizzieren Sie diese Mengen.

b) Bestimmen Sie alle Extrema von f und geben Sie dabei jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt und ob dieses global ist.

Aufgabe 3:
Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ sei die Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt \end{pmatrix}$$

gegeben und deren Bildmenge $B = \{c(t) : t \in [0,1]\}$.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge von B in Abhängigkeit von a und b.

b) Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen dem Tangentialvektor an die Kurve und dem Vektor

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

konstant ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y\,y' - e^x = 0, \quad y(0) = 1$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.

Aufgabe 5:
Wir betrachten die Funktion $f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton fällt.

b) Berechnen Sie

$$\int_e^{e^2} f(x)\,dx.$$