Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie für jede der folgenden Reihen alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{xk}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^x + k}.$$

Aufgabe 2:

a) Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x).$$

Zeigen Sie, dass f weder surjektiv noch injektiv ist, und bestimmen Sie die Extrema von f.

b) Die Funktion $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) = \exp(x) \ln(x).$$

Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.

Aufgabe 3:
Sei $f(x) = x^x$ für $x > 0$ definiert.

a) Zeigen Sie für alle

$$x \in]\frac{1}{e}, 1[$$

die Ungleichung

$$0 < f'(x) < 1, \quad 0 < f(x) < 1.$$

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

$$x_0 \in]\frac{1}{e}, 1[, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

gegeben. Zeigen Sie

$$x_n < x_{n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Zeigen Sie, dass die in (b) definierte Folge gegen 1 konvergiert.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 17e^{4x}.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Gibt es periodische Lösungen? Gibt es nicht-periodische Lösungen?

b) Geben Sie sämtliche Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung an, welche den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0$$

genügen.

Aufgabe 5:
Sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi \text{ und } \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$

Skizzieren Sie diese Menge und zeigen Sie, dass der Punkt

$$\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$$

eine globale Minimalstelle der Funktion

$$f(x, y) = (y - \sin(x))\,(y - \cos(x))$$

auf D ist.