Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(b) Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \binom{2k}{k}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$$

konvergiert.

Aufgabe 2

Sei

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ und } \frac{1}{x+1} \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von A.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) < \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und $f(0) > 0$.

(a) Zeigen Sie

$$f(x) < f(0) + \frac{x}{2} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

(b) Folgern Sie, dass ein eindeutiger Fixpunkt x_0 von f im Intervall $]0, \infty[$ existiert, also genau ein Punkt $x_0 > 0$ mit

$$f(x_0) = x_0.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x\,y\,(x^2 + y^2 - 1)$$

und

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das absolute Maximum und Minimum von f auf D.

Aufgabe 5

Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) - \frac{1}{x-1}y(x) = x - 1$$

auf dem Intervall $]1, \infty[$.