Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0, f(0))$ sei die Gerade $y = 2x + 1$.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, gegeben durch

$$a_n := n \cdot \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right).$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right)$$

auf absolute Konvergenz.

Aufgabe 2

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\arctan(x)}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Menge der Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sowohl die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) - y(x) = -x,$$

als auch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(2022)}(x) - y^{(2020)}(x) + y'(x) + y(x) = 2e^x + x + 1$$

lösen.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Es seien $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(t) := t^4 - 4t + 4, \quad f(x,y) := x^4 - 4xy^3 + 4y^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass h ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie dieses.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(c) Zeigen Sie, dass

$$f(ty, y) \geq 0$$

für alle $t, y \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie nun, dass f in $(0,0)$ das globale Minimum annimmt.

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass

$$|1 - \cos(t)| \leq |t|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^3 y^3)}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit in $(0,0)$.