Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Zu einer vorgegebenen reellen Zahl r wird eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = r$$

und

$$a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

(Also $a_2 = a_1$, $a_3 = a_1 a_2$, $a_4 = a_1 a_2 a_3$, ...)
Zeigen Sie

$$a_n = a_{n-1}^2 \qquad \text{für alle } n \geq 3.$$

Zeigen Sie damit durch Induktion

$$a_n = r^{(2^{n-2})} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

(b) Sei $(p_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Primzahlen, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... Für $n \geq 3$ sei bekannt, dass die Ungleichung

$$p_n \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$$

gilt. (Also $p_3 < p_1 p_2$, $p_4 < p_1 p_2 p_3$, ...)
Beweisen Sie durch Induktion mit Hilfe dieser Ungleichung

$$p_n \leq 2^{(2^{n-1})} \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie alle Tupel $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, so dass die Gerade

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1$$

eine Tangente an den Graphen der Funktion

$$f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \alpha x + \beta$$

ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Konstanten mit $a_n \neq 0$ und sei

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

ein reelles Polynom vom Grade n.

Zeigen Sie: Hat p genau n paarweise verschiedene reelle Nullstellen

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n,$$

dann ist keine Nullstelle eine kritische Stelle (Nullstelle der Ableitung) von p.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Abhängig von einem reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$ sei $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_c(x) = e^{-x} + cx.$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $f_c(\mathbb{R})$ in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, für die f_c mindestens eine Nullstelle hat.

Aufgabe 4

Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 9\}$$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2 - 9) \cdot y.$$

(a) Bestimmen Sie alle im Innern von K liegenden kritischen Punkte von f und die zugehörigen Funktionswerte. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf K.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{y(x) + 1}, \quad y(0) = 0,$$

und geben Sie das maximale Definitionsintervall der Lösung an.