Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie

$$\sin(x) > x - \frac{x^3}{6}$$

für alle $x > 0$.

(b) Sei $x_0 > 0$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + \frac{x_n^3}{6}$$

für $n \geq 0$ definiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wächst und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Aufgabe 2

(a) Beweisen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x-x^2)}{x} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n = e.$$

(b) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} x^n$$

konvergent ist.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 0$$

und der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

für $x \in \mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$g''(x) + 4g(x) = 5e^x$$

löst.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Sei die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \left(t^2 \sin(t), t^2 \cos(t)\right).$$

Bestimmen Sie die Länge der Kurve γ.

Aufgabe 5

Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x \cdot (2 - x)\}$$

und die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 4y - xy$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(1, 1)$ das globale Maximum auf K annimmt.

Fortsetzung nächste Seite!