Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Sei $x_1 \in \,]0,1[$ und sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^3 - x_n^5}{2}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, rekursiv definiert.

(a) Zeigen Sie

$$0 < x_n < 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_0^{1+x} \frac{y-1}{1+(y-1)^{2018}}\,dy - \int_0^{1-x} \frac{y-1}{1+(y-1)^{2018}}\,dy$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{y-1}{1+(y-1)^{2018}}\,dy.$$

Aufgabe 4

Sei

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq e^x\}$$

und $f : K \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x - 2xy + \ln(y).$$

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen von f auf K.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) - y(x) &= -x + 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= a \end{aligned}$$

die Bedingung

$$y(1) = 2e$$

erfüllt.