Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Ermitteln Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 - 1},$$

auf $x = \pm 1$ stetig fortsetzbar ist, und finden Sie alle Nullstellen, die Monotonie-Intervalle und die lokalen oder globalen Extrema der Fortsetzung.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^3}}{e^{-x^2}}$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$$

nicht konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \sqrt{k}}$$

konvergiert.

Aufgabe 4

Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\},$$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x\, y\, (x + y - 1)$$

Berechnen Sie $f(K)$.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend. Zeigen Sie, dass dann auch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h(a) = \int_a^{a+1} f(x)\, dx,$$

streng monoton steigend ist.