Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Beweisen Sie: Ist f in a differenzierbar und besitzt dort ein lokales Extremum, so ist $f'(a) = 0$.

(b) Sei f nun differenzierbar, in a sogar zweimal. Zeigen Sie: Gilt $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Maximum.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: In (b) gilt stets auch die Rückrichtung.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x) \exp(x^2)\, dx.$$

Aufgabe 3:

Sei $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

gegen einen Wert im Intervall $[0, 1]$ konvergiert.

Aufgabe 4:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sin(x - a), & \text{für } x \geq 0, \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x} - b, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{a,b}$ in 0 stetig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{a,b}$ in 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x, \quad y(1) = 1.$$