

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie alle positiven reellen Zahlen x , für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

konvergiert.

Aufgabe 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = e^x - 3x^2.$$

- (a) Beweisen Sie (z.B. mit Hilfe des Zwischenwertsatzes), dass die Funktion mindestens 3 Nullstellen in \mathbb{R} hat.
- (b) Beweisen Sie (z.B. mit Hilfe des Satzes von Rolle), dass die Funktion höchstens 3 Nullstellen in \mathbb{R} hat.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3 - x^2 - 3x + 12}{x^2 + x - 6} dx.$$

Aufgabe 4:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2.$$

- (a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f .
- (b) Beweisen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum hat. Betrachten Sie dazu die Funktion f auf den Parabeln $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}.$$