

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie für $0 < x < 1$

$$\int_0^1 x^{tx} dt = \frac{x^x - 1}{x \ln(x)}$$

und berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^x - 1}{x \ln(x)}.$$

Aufgabe 2:

Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und für $x > 0$ differenzierbar mit

$$0 < f'(x) < 1 \quad \text{für alle } x > 0.$$

Es gelte außerdem $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $x_1 = 1$ monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

b) Zeigen Sie

$$e = 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3) \cdot k!}.$$

Aufgabe 4:

Sei Q das abgeschlossene Quadrat im \mathbb{R}^2 mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad (-1, 1), \quad (-2, 0), \quad (-1, -1),$$

und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = x e^{x+y}.$$

Skizzieren Sie Q und begründen Sie, weshalb f auf Q ein Maximum und ein Minimum annimmt. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf Q .

Aufgabe 5:

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) = -2y'(x) - 2y(x) + x, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$$