

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Beweisen Sie die Konvergenz oder Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n.$$

Aufgabe 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{4x-6}{x+1}, & \text{für } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen von f .

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$\sin(x) = 1 - x$$

genau eine reelle Lösung besitzt.

Aufgabe 4:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3.$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion f .

Aufgabe 5:

Die folgenden Funktionen $\psi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= -\frac{1}{2} \cos(x) + \exp(x), \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2} \cos(x) + 2 \exp(-x), \\ \psi_3(x) &= -\frac{1}{2} \cos(x).\end{aligned}$$

- a) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung an.
b) Bestimmen Sie eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$\psi(0) = -1, \quad \psi'(0) = -\frac{5}{2}.$$