Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für eine fest gewählte reelle Zahl $b > 0$ werde die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{b^{n+1}}{b^n + n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

betrachtet.

a) Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert in Abhängigkeit von $b > 0$.

b) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

in Abhängigkeit von $b > 0$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{3}{\pi}\arctan(e^x)\right)$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

a) Man bestimme D_f sowie den Wertebereich $W_f = f(D_f)$.

b) Man berechne alle Nullstellen von f und entscheide mit Begründung, ob die Ableitung f' eine Nullstelle in $]0, \infty[$ besitzt.

Aufgabe 3:

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ werde die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$$

betrachtet. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)f_n(x).$$

b) Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+1}e^{-x} = 0.$$

Fortsetzung nächste Seite!

c) Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = n!\,.$$

Aufgabe 4:

Für eine fest gewählte reelle Zahl $r > 0$ betrachte man die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

sowie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - r^2).$$

Man skizziere $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und bestimme alle globalen Extremstellen von f auf D.

Aufgabe 5:

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \ln(x) \cdot y(x) + x^x \qquad \text{für } x > 0$$

mit

$$y(1) = 0.$$