Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es sei $r > 0$ eine fest gewählte reelle Zahl. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sqrt{rn}}{1 + r\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt und bestimme für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aufgabe 2:
Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} x^n$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Funktionen $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\ln(x))^2$$

und $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \ln(x^2).$$

(a) Man zeige, dass die Graphen G_f und G_g genau zwei Schnittpunkte besitzen und gebe deren x-Koordinaten a und b mit $a < b$ an.

(b) Man zeige durch partielle Integration, dass der Inhalt A der durch G_f und G_g zwischen a und b begrenzten Fläche durch

$$A = \int_a^b x\,(f'(x) - g'(x))\,dx$$

gegeben wird.

(c) Man bestimme mit Hilfe von (b) den Wert des Flächeninhalts A.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y+1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass f partiell differenzierbar ist und bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x,y)$ und $\partial_y f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Man überprüfe die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Man bestimme alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Lösungsfunktionen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0,$$

die in $x = 0$ ein lokales Minimum besitzen.