Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie

$$\sin(x) < x \qquad \text{für alle } x > 0.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der rekursiv gegebenen Folge

$$x_{n+1} = \sin(x_n)$$

mit beliebigem Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_1 = f_2 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle } n \geq 2$$

rekursiv definierte Fibonacci-Folge.

a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

b) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge gegen 0 konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k}$$

konvergiert.

Aufgabe 3

Sei die Funktion $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)}.$$

a) Bestimmen Sie $f(]1,\infty[)$.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k f(k)$$

auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2+1)\,(\sin(\pi y)+2).$$

a) Zeigen Sie, dass f unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

b) Untersuchen Sie, ob f lokale Maxima besitzt.

c) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 5

Es sei die Menge

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$$

und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{y+1}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 1.$$