Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie für $c > 0$ die absoluten Extrema der Funktion $f_c :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_c(x) = cx - \ln(x)$$

in Abhängigkeit von c.

b) Bestimmen Sie alle Werte $c > 0$, für die die Gleichung

$$cx = \ln(x)$$

genau eine Lösung $x > 0$ hat.

Aufgabe 2

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(a_k)$$

absolut konvergiert.

b) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Behauptung falsch wird, wenn man nicht voraussetzt, dass f stetig differenzierbar ist, sondern nur, dass f stetig ist.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche von

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi,\ \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_c(x,y) = x^2 + y^2 + cxy.$$

Zeigen Sie, dass f_c für $|c| \leq 2$ ein absolutes Minimum im Punkt $(0,0)$ hat.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + e^{xy}.$$

Für festes $(x,y) \neq (0,0)$ sei $h : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t) = g(tx,ty).$$

Zeigen Sie $h'(t) \geq 0$ für $t > 0$ und folgern Sie, dass g ein absolutes Minimum in $(0,0)$ hat.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''''(x) + 2y'''(x) - 8y''(x) = \exp(x).$$