

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge in \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegen a konvergiert.

- b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so dass die zugehörige Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- c) Sei vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für die Ableitung

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{2}$$

für alle ξ in \mathbb{R} . Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- a) Zeigen Sie per Induktion

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - x_0|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- b) Zeigen Sie

$$|x_n - x_0| \leq 2|x_1 - x_0|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3:

- a) Diskutieren Sie die Funktion

$$f(r) = e^{-r^2} + r^2$$

hinsichtlich globaler Extrema.

- b) Bestimmen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$g(x, y) = e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2$$

und die Hesse-Matrix im kritischen Punkt.

- c) Besitzt
- g
- ein absolutes Extremum, und welcher Art ist es?

Aufgabe 4:

- a) Zeigen Sie für
- $a \neq 0$

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{a^{k+1}}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

- b) Geben Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$$

bei der Entwicklung um 0 sowie ihren Konvergenzradius an.

Aufgabe 5:

- a) Finden Sie für gegebenes
- $k \in \mathbb{N}$
- alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(k+2)} = 2y^{(k+1)} - y^{(k)}.$$

- b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = 2y' - y + x^2,$$

zum Beispiel mit Hilfe von Aufgabenteil a).