Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass sich eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden lässt, so dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

absolut konvergiert.

b) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass es ein $d > 0$ gibt mit $b_{n+1} < b_n - d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$$

konvergiert.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-x^2 + 1)$$

auf der Kreisscheibe $D := \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2)$. Man betrachte die Funktion

$$g : (0,2) \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto g(x) := \frac{1}{f(x)} \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h : (0,2) \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ g'(1) & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung g' jeden Wert $q \in \mathbb{R}$ annimmt, d.h. dass es zu jedem $q \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in (0, 2)$ gibt, so dass $g'(x_0) = q$ gilt.

Aufgabe 4:

Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x < 0, \\ e^x - 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Es bezeichne $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf $\mathbb{R}_+$:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0\ . \tag{1}$$

a) Sei φ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Zeigen Sie: Genau dann ist $h(x)\varphi(x)$ auch eine Lösung, wenn $h(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$h'' \cdot \varphi + h' \cdot (2\varphi' + f\varphi) = 0$$

ist.

b) Wenden Sie a) auf die Differentialgleichung

$$y'' + y' + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

mit Lösung $\varphi(x) := \frac{1}{x}$ an, um eine weitere Lösung zu erhalten.