Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Sie können in jeder der nachstehenden Aufgaben maximal 6 Punkte erreichen. Bitte denken Sie daran, alle Ihre Antworten mathematisch und logisch präzise sowie verständlich und nachvollziehbar zu begründen.

Aufgabe 1:

Es sei $(a_n)_n$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ höchstens 1 ist.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := x^{2010} - x - 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert ist, genau zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 3:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$, und es sei f eine in $I := [a; b]$ differenzierbare und w eine in I stetige Funktion. Es sei $f(a) = 0$ und $0 \leq f'(x) \leq w(x)$ für alle $x \in I$.

a) Begründen Sie kurz, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H(x) := 2 \cdot \int_a^x w(t) f(t)\, dt - f^2(x)$$

auf I monoton steigt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ punktweise auf $[0;1]$ gegen eine Riemann-integrierbare Grenzfunktion f konvergiert, dass aber $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_n$ nicht gegen $\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergiert.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = e^t.$$