Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert, in folgenden Fällen:

a) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

b) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

c) $(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, und für alle $n \geq 1$ ist $a_n \geq \frac{1}{n}$.

Aufgabe 2:

Es sei $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Bestimmen Sie mittels der Taylorformel das Polynom 2. Grades $p_2(x)$, für das gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(f(x) - p_2(x)) = 0.$$

b) Beweisen Sie für alle $x \in [0, \infty[$ die Abschätzung

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{16}x^3.$$

Aufgabe 3:

Es sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - x + 2y^2.$$

Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei $Q := [0,1] \times [1,2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = 0, \\ x^y & \text{, falls } x \neq 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig in Q, insbesondere in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in Q$ mit $x_0 = 0$.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x,y)dx \text{ für jedes } y \in [1,2].$$

c) Berechnen Sie

$$\int_1^2 f(x,y)dy \text{ für jedes } x \in [0,1].$$

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = 2xy - 6x,$$

b) Zeigen Sie: Ist y eine Lösung von $(*)$ und J ein Intervall, in dem $y(x) \neq 0$, so erfüllt $z(x) := \frac{1}{y(x)}$ in J die Differentialgleichung

$$(**) \qquad z' = 6xz^2 - 2xz.$$

Falls umgekehrt z die Differentialgleichung $(**)$ mit $z(x) \neq 0$ im Intervall J löst, so ist $y(x) = \frac{1}{z(x)}$ in J Lösung von $(*)$.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $(**)$ mit der Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{2}$, und geben Sie hierzu das maximale Lösungsintervall an.