

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

- a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \frac{(\cos(n))^n - \sin(n^n)}{(3 - \sin(\sqrt[n]{n}))^n} \right)$$

auf Konvergenz.

- b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, positive und beschränkte Folge.

- i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ konvergiert.
- ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ konvergiert.

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Ferner existiere eine streng monoton fallende Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(a_n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- a) Zeigen Sie: $f(0) = 0$.
- b) Zeigen Sie: $f'(0) = 1$.
- c) Zeigen Sie: Es gibt eine streng monoton fallende Nullfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f'(b_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- d) Zeigen Sie: $f''(0) = 0$.

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{2\pi} \sin(t^2) dt$. Prüfen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{f(2x)}$$

existiert, und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 4:

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass der Grenzwert $L := \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existiert und $L \neq 0$ gilt. Prüfen Sie in Abhängigkeit von $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ob

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x) + 4}{g(x) \cdot \exp(\cos(\pi x))}$$

existiert.

Aufgabe 5:

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ und } y < 0\}$ und sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^y - xy.$$

Sei $f(D) := \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$.

- Untersuchen Sie f auf lokale Extrema.
- Prüfen Sie, ob die Menge $f(D)$ nach oben beschränkt ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum von $f(D)$.
- Prüfen Sie, ob die Menge $f(D)$ nach unten beschränkt ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls das Infimum von $f(D)$.