Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 \in [0,1] \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \cos(1-a_n) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(1-x) - x$$

streng monoton fallend ist, und bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

d) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie (zum Beispiel unter Verwendung der Additionstheoreme), dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gilt.

Hinweis: Sie dürfen $\sin(\pi) = 0$ und $\sin(x) > 0$ für alle $x \in]0, \pi[$ verwenden.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{2e^{2x} + 5e^{x}}{e^{2x} + 4e^{x} + 5}.$$

Geben Sie eine Stammfunktion von f an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x - x^y.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1, 1)$ der einzige kritische Punkt von f ist.

b) Untersuchen Sie, ob im Punkt $(1, 1)$ ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt der Funktion f vorliegt.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \exp(-x^2)$$

sowie die Differentialgleichung

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = \exp(-x^2)(-8x^3 - 8x^2 + 10x + 4). \qquad (D)$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Lösung von (D) ist.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (D), die

$$\psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi'(0) = -1$$

erfüllen.