

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

Entscheiden Sie, für welche $x > 0$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x)^k$$

konvergiert, und geben Sie für diese x den Grenzwert als rationale Funktion an.

Aufgabe 2:

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i) Es ist $f'(a)g(a) = f(a)g'(a)$ für alle $a \in [0, 1]$.
- ii) Es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $\ln(f(a)) = \ln(g(a)) + C$ für alle $a \in [0, 1]$.
- iii) Es gibt $K \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = Kg(a)$ für alle $a \in [0, 1]$.
- iv) Für alle $a \in [0, 1]$ ist die Summe der Integrale

$$\int_0^a f(x)g'(x)dx + \int_a^1 f'(x)g(x)dx$$

konstant.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^6}{x^6 + y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion f stetig ist.
- b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$, sofern diese existieren.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin(x)\}$$

sowie die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = y^2(\sin(x) - y).$$

- a) Fertigen Sie eine Skizze der Menge K an.
- b) Zeigen Sie, dass die Menge K kompakt ist.
- c) Bestimmen Sie

$$\sup f(K) \quad \text{und} \quad \inf f(K).$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen!

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 4y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5 \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{D})$$

- a) Zeigen Sie, dass $y(x) = \exp(-3x)$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung der zu (D) gehörigen homogenen Gleichung ist.
- b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung (D).
- c) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (D) so, dass $y(0) = 0$ gilt und die Einschränkung von y auf $[0, \infty[$ beschränkt ist.