Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben seien die reellen Folgen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n k(k+1) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ sowie } \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k k(k+1) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

gilt.

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_{2n-1} = -2n^2$.

c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_{2n} = 2n(n+1)$.

Aufgabe 2:

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgen aus Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie (mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1), dass

$$\frac{|b_{2n+1}|}{a_{2n+1}} \leq \frac{|b_{2n}|}{a_{2n}} \leq \frac{|b_{2n-1}|}{a_{2n-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\frac{|b_{2n}|}{a_{2n}}$, $\frac{|b_{2n-1}|}{a_{2n-1}}$ und $\frac{|b_{2n+1}|}{a_{2n+1}}$.

b) Zeigen Sie mithilfe des Leibniz-Kriteriums, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

nicht absolut konvergiert.

Hinweis: Geben Sie eine geeignete Minorante an.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- Untersuchen Sie, ob f in 0 differenzierbar ist.
- Bestimmen Sie (mit Begründung) $f(\mathbb{R})$.
- Skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

sowie die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = y - x^2.$$

- Fertigen Sie eine Skizze der Menge K an und zeigen Sie, dass K abgeschlossen und beschränkt ist.
- Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Menge $f(K)$.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 25y(x) = 16e^{3x} + 25 \\ y(0) = 41. \end{cases}$$