

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Wir betrachten die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $0 < a_0 < 3$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}(9 + (a_n)^2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

- a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n < 3$.
- b) Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.
- c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 2:

- a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \arctan(n)}$$

auf Konvergenz.

- b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2} dx.$$

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f(-1) < f(0)$ und $f(0) > f(1)$.
Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes):
Es gibt ein $x_0 \in]-1, 1[$ mit $f''(x_0) < 0$.

Aufgabe 4:

Sei

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - x^2$$

und sei $K \subset \mathbb{R}^2$ das Kompaktum in $\mathbb{R}^2$, welches vom Graphen von h und der x -Achse eingeschlossen wird. Sei

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^4 + x^2 + y^2.$$

- a) Skizzieren Sie K .
- b) Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen von f .

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(y(x) + x^2 \cdot y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{2}. \quad (*)$$

- a) Zeigen Sie: Eine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ kann keine Nullstelle haben.
- b) Bestimmen Sie die maximale Lösung y (mit Angabe des maximalen Existenzintervalls) der Differentialgleichung $(*)$ mit dem Anfangswert $y(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.