
Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
--------------------	----------------	----------------------

Kennzahl: _____

Kennwort: _____

Arbeitsplatz-Nr.: _____

**Herbst
2024**

43910

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Differential- und Integralrechnung**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **7**

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n^2 - a_n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fällt.
- c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \int_0^{\cos(x)} \exp(s^3 + 4) \, ds.$$

Aufgabe 3:

- a) Entscheiden Sie, ob der folgende Grenzwert existiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin(x)^2}{2024x^2 + 1}$$

- b) Es sei $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ eine Funktion, für die das Integral

$$\int_0^\infty f(x) \, dx$$

existiert. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$a_n = \int_n^\infty f(x) \, dx.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergiert.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq x\}$$

und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy^2 - \frac{3}{4}x^2.$$

- a) Skizzieren Sie die Menge D .
- b) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum von f .

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y(x) \ln(y(x))}{x}, \quad x > 0$$

und bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(1) = a$ für $a \in \{1, 2\}$.