Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei die Folge reeller Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

b) Überprüfen Sie die Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2\right) \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(f_{n-1} + \frac{f_{n-1}^2}{f_n} - f_n\right)$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x + 14|x-1|, & \text{für } x < 0, \\ 2x^3 + 3x^2 - 12x + 16, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion f differenzierbar ist, und berechnen Sie an diesen Stellen ihre Ableitung.

b) Zeigen Sie, dass f genau ein lokales Extremum besitzt, und bestimmen Sie Art und Lage dieses Extremums.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Gleichung

$$\arctan(x^2) = \cos(x).$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung auf $[-\pi, \pi]$ genau zwei Lösungen besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung auf $\mathbb{R} \setminus \,]-\pi, \pi[$ keine Lösung besitzt.

Aufgabe 4:

Seien

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -5 \le x \le 5 \text{ und } -3 \le y \le \frac{3}{5}x + 3 \right\}$$

und

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |x \cdot y| + x \cdot y$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in D$, für die $f(x, y) = 0$.

b) Bestimmen Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f.

Aufgabe 5:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = y(x)(\alpha - 6y(x)), \quad y(0) = -1.$$