Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 3}$ monoton fallend ist, und untersuchen Sie anschließend die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1).$$

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} \geq 1 + \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 3$ gilt, und untersuchen Sie anschließend die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1).$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass $\sin(x) > x\cos(x)$ für alle $x \in \,]0,\pi]$ gilt.

b) Sei $f : [1/\pi, \infty[\, \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x\sin(1/x)$. Bestimmen Sie die Bildmenge $f([1/\pi,\infty[)$ von f.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Stammfunktion F der Abbildung $f : \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2}{x^5}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

für die gilt:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -1.$$

Aufgabe 4:

Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = (y^2 - x^2 - 1)^2 - 4x^2.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x,y) \in K$ genau dann, wenn

$$x \in [-1,1] \quad \text{und} \quad -(1-|x|) \leq y \leq 1 - |x|.$$

Zeichnen Sie sodann die Menge K.

b) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f auf K.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie unter Verwendung der Substitution $v(x) = u(x^2)$ die zweimal differenzierbare Funktion $u :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, welche das Anfangswertproblem

$$u''(x^2) + \frac{1-2x}{2x^2} u'(x^2) + \frac{1}{4x^2} u(x^2) = \frac{1}{4x^2}, \quad x > 0, \qquad u(1) = u'(1) = 1$$

löst.