

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n + 2n^2}{n^2 + 3}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
- b) Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left| a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right| < \frac{1}{100}$$

für alle $n \geq N$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{(\cosh(x))^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f .
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- c) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 für die Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt:

$$|f(x) - T_2(x)| < \frac{5}{16}.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(x^2 + y^2 - 1) \leq 0\}$$

sowie die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x(y^2 + 2)$.

- a) Skizzieren Sie die Menge D .
- b) Zeigen Sie, dass f auf D ein globales Maximum annimmt und bestimmen Sie dieses.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + ay' - 2a^2y = e^x$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.