

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $x_0 \geq 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{(n+3)x_n^2}$ für alle $n \geq 0$.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $x_{2n} \geq 1$ für alle $n \geq 0$ gilt.
- b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergiert.

Aufgabe 2:

- a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ absolut konvergiert.
- b) Bestimmen Sie eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ divergiert.
- c) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 3:

- a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = 2(x^3 + x) \arctan(x^2 + 1).$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f .

- b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ für } x \geq 0, \\ 1 & , \text{ für } x < 0, \end{cases}$$

keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x(y^2 - z^2) + y(x^2 + z^2).$$

- a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f .
- b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f .
- c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(t) = f(ta, ta, ta)$, eine globale Maximalstelle hat.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$w''(x) + w(x) = x$$

mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$w(0) = 1, \quad w(\pi) = \pi - 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{w(x) - 1}{x^2} \in \mathbb{R}.$$