Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \neq 0$ alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(x-a)^{n-1}}$$

konvergiert, und geben Sie für diese $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Reihe in Form einer Polynomfunktion an.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{für} \quad x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ explizit an.

b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von Teilaufgabe a) werde die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

betrachtet. Bestimmen Sie alle lokalen Maximalstellen und alle lokalen Minimalstellen von F.

Aufgabe 3:

Es sei die Kurve

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = \left(\cos(t) + t \cdot \sin(t),\ \sin(t) - t \cdot \cos(t),\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, t^3 \right),$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$d : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad d(t) = \|\varphi(t)\|,$$

streng monoton wachsend ist.

b) Zeigen Sie

$$\|\varphi'(t)\| = t \cdot \sqrt{1 + 3\,t^2} \qquad \text{für alle} \quad t \in [0,1]\,.$$

c) Berechnen Sie die Bogenlänge von φ.

Aufgabe 4:

Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x-y) \cdot \exp(-(x^2+y^2)),$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wertemenge $f(D_r)$ von f auf der Kreislinie

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $r > 0$.

b) Bestimmen Sie alle globalen Maximalstellen und alle globalen Minimalstellen der Funktion f auf der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Lösungsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 8\,y(x) = 0$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 6 \qquad \text{und} \qquad y''(0) = 0.$$