

---

|                    |                |                      |
|--------------------|----------------|----------------------|
| Prüfungsteilnehmer | Prüfungstermin | Einzelprüfungsnummer |
|--------------------|----------------|----------------------|

---

Kennzahl: \_\_\_\_\_

Kennwort: \_\_\_\_\_

Arbeitsplatz-Nr.: \_\_\_\_\_

**Frühjahr  
2025**

**43910**

---

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen**  
**— Prüfungsaufgaben —**

---

Fach:           **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Differential- und Integralrechnung**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben):   **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage:       **7**

---

Bitte wenden!

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

- a) Beweisen Sie, dass  $4^n > n^2$  für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt.
- b) Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{n}{4^n}$$

konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

- c) Zeigen Sie, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n = \frac{4^n}{1 + n + 4^n}$$

konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

**Aufgabe 2:**

- a) Beweisen Sie

$$\left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x \right) \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right) = \frac{1}{n}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- b) Sei

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

für  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ .

Berechnen Sie den Grenzwert

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$ .

- c) Berechnen Sie

$$\sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \infty[ \}$$

in Abhängigkeit von  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 3:**

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $I_n$  definiert durch

$$I_n := \int_0^{\sqrt{\pi}} x^n \cdot \sin(x^2) dx.$$

a) Berechnen Sie  $I_1$ .

b) Beweisen Sie

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} \left( \pi^{\frac{n+3}{2}} - 2I_{n+4} \right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Berechnen Sie  $I_5$ .

**Aufgabe 4:**

Es sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)(y - x).$$

a) Zeigen Sie, dass  $D$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von  $f$  im Inneren  $\overset{\circ}{D}$  von  $D$ .

c) Geben Sie den Rand  $\partial D$  von  $D$  an und berechnen Sie  $f(x, y)$  für alle  $(x, y) \in \partial D$ .

d) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum von  $f$  auf  $D$ .

**Aufgabe 5:**

Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{2x}{y(x) - 1} \quad \text{mit} \quad y(2) = 3$$

mit Angabe des maximalen Definitionsintervalls.