Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

(2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und deren Art für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + (\sin y)^2$.

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = \sin(y)\cos(y)$$
$$\dot{y} = -x$$

und entscheiden Sie, welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.

Aufgabe 2:

(1+3+2 Punkte) Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}.$$

Weiter sei $\xi > 1$.

a) Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall I_ξ mit $0 \in I_\xi$ gibt, so dass

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = \xi$$

eine eindeutige Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ auf I_ξ besitzt.

b) Berechnen Sie die Lösung λ_ξ und zeigen Sie damit, dass man immer $[0, \infty) \subseteq I_\xi$ erreichen kann.

c) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\mu_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems aus a) an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

(2+4 Punkte) Für $r > 0$ sei $K_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius r.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{z^k}{k}$$

und zeigen Sie, dass $f_R : K_R(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k}$ holomorph ist.

b) Zeigen Sie, dass für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-2it}$ das Integral

$$\int_\gamma \frac{f_R(z)}{(z-\frac{1}{4})^2}dz$$

existiert, und berechnen Sie es.

Aufgabe 4

(1+1+4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1+z}\sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\sin(z-1)}{z-1}.$$

Bestimmen Sie

a) bei 1,

b) bei -1 und

c) bei 0

jeweils den Typ der isolierten Singularität von f, und berechnen Sie das Residuum.

Aufgabe 5

(2+1+3 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Aussage:
Die konstante Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die einzige holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ...

a) ... mit

$$f\left(\exp\left(\frac{\pi i n}{2020}\right)\right) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) ... mit

$$f(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1.$$

c) ... mit

$$f\left(\exp\left(\frac{in}{2020}\right)\right) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$