

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)

- a) Geben Sie eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die in keinem Punkt stetig ist. Zeigen Sie dabei explizit die Unstetigkeit in jedem Punkt.
- b) Geben Sie eine Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die integrierbar ist, aber nicht stetig. Begründen Sie dabei diese Eigenschaften. (Sie können sich auf das Riemann- oder das Lebesgue-Integral beziehen.)

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x(1 - y), xy)$.

- a) Zeigen Sie, dass f den Streifen $S :=]0, \infty[\times]0, 1[$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q :=]0, \infty[^2$ abbildet (d.h. f bildet S bijektiv auf Q ab und $f : S \rightarrow Q$ sowie die Umkehrabbildung $f^{-1} : Q \rightarrow S$ sind stetig differenzierbar.)
- b) Wir identifizieren nun \mathbb{R}^2 in kanonischer Weise mit \mathbb{C} und fassen f als Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf. Bildet dann f den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$ konform (d.h. biholomorph) auf den ersten Quadranten $Q = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > 0, \operatorname{Im}(w) > 0\}$ ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (1+5 Punkte)

- a) Formulieren Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen.
- b) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist der Imaginärteil $\operatorname{Im}(f) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen reellen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 15e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und

$$p :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (r, \varphi) \mapsto f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot \cos \varphi + g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi,$$

$$q :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (r, \varphi) \mapsto \frac{1}{r} \left(g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot \cos \varphi - f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi \right).$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \rightarrow]0, \infty[\times \mathbb{R}$ eine Lösung des Systems

$$r' = p(r, \varphi), \quad \varphi' = q(r, \varphi),$$

so ist

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (\alpha_1(t) \cdot \cos \alpha_2(t), \alpha_1(t) \cdot \sin \alpha_2(t)),$$

eine Lösung des Systems

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y).$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = y + x^3 + xy^2, \quad y' = -x + x^2y + y^3,$$

$$(x(0), y(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

auf \mathbb{R}^2 .