

**Thema Nr. 2**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

**Aufgabe 1** (2+2+2=6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\mathbb{R}$  punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  gegen  $f$  konvergiert.
- c) Sei  $q \in [0, 1[$  und  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$ . Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $A$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Aufgabe 2** (2+1+3=6 Punkte)

- a)
  - (i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes  $z \in \mathbb{R}$  und die Funktion  $f : z \mapsto f(z)$ , die so entsteht, stetig ist auf  $\mathbb{R}$ .

- (ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  an, so dass die Funktion  $f$  durch (1) auf  $U$  definiert und dort holomorph ist.
- b) Die komplexen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  (mit  $n \geq 1$ ) erfüllen  $|a_j| = 1$  für  $j = 1, \dots, n$ . Zeigen Sie, dass es einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  gibt, so dass das Produkt der Abstände zwischen  $z$  und  $a_j$ , für  $j = 1, \dots, n$ , mindestens 1 ist.  
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion  $f(z) := (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$ .

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3** (3+3=6 Punkte)

- a) Die Zahl  $a \in \mathbb{R}$  erfüllt  $a > 1$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  besitzt und dass diese Lösung reell und positiv ist.  
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Rouché auf die Funktion  $f(z) := ze^{a-z} - 1$  an und wählen Sie als Vergleichsfunktion  $g(z) := ze^{a-z}$ .

- b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^\pi \frac{1}{3 + 2 \cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

**Aufgabe 4** (3+3=6 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit  $\langle f(x), x \rangle = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . (Dabei bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ .) Man zeige:

- a) Für jede auf einem offenen Intervall  $J$  definierte Lösung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  der Differentialgleichung  $x' = f(x)$  ist die Euklidische Norm  $|\varphi(t)|$  konstant.
- b) Jede auf einem offenen Intervall  $J$  definierte Lösung  $\varphi$  kann zu einer Lösung  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  fortgesetzt werden.

**Aufgabe 5** (6 Punkte)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x^3 - y.\end{aligned}$$

Man zeige, dass dieses System den Nullpunkt als einzige Ruhelage hat und dass die Nulllösung stabil ist.

Hinweis: Man suche eine Ljapunow-Funktion der Form  $V(x, y) = \alpha x^4 + \beta y^2$  mit Konstanten  $\alpha, \beta > 0$ .

Zur Erinnerung: Eine Ljapunow-Funktion für das Vektorfeld  $f(x, y)$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine stetig differenzierbare Funktion  $V(x, y)$ , die längs jeder Integralkurve von  $f$  fällt; d.h.  $\langle \text{grad} V(x, y), f(x, y) \rangle \leq 0$ .