

Thema Nr. 2  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

**Aufgabe 1:**

- (a) *Dezimalziffern einer rationalen Zahl*  $a/b \in [0, 1[$ : Gegeben seien zwei Zahlen  $a \in \mathbb{N}_0$  und  $b \in \mathbb{N}$  mit  $a < b$ . Die Folgen  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  werden wie folgt rekursiv definiert:

$$r_0 := a, \quad z_{n+1} := \left\lfloor \frac{10r_n}{b} \right\rfloor, \quad r_{n+1} := 10r_n - bz_{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei bezeichnet  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  den ganzzahligen Anteil von  $x \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$0 \leq r_n < b, \quad r_n \in \mathbb{N}_0, \quad z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}.$$

- (b) Beweisen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0,$$

indem Sie explizit die Definition der Konvergenz reeller Folgen nachprüfen.

- (c) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} = \frac{a}{b}$$

(3+1+2 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Es sei  $u_0 > 0$ . Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(t) = u(t)^{u(t)}, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Man zeige, dass für jedes  $u_0 > 0$  eine eindeutige maximale (nicht fortsetzbare) Lösung existiert.
- (b) Man zeige für jedes  $u_0 > 0$ , dass die maximale Lösung nicht global auf  $\mathbb{R}_0^+$  definiert ist.  
*Hinweis:* Betrachten Sie erst den Fall  $u_0 > 1$ .

(2+4 Punkte)

**Aufgabe 3:**

- (a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.  
 (b) Von einer beliebig oft differenzierbaren Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei bekannt:

$$f(0,0) = 0, \\ D_1 f(0,0) = 1, \quad D_2 f(0,0) = 2.$$

Hierbei bezeichnet  $D_j$  den partiellen Ableitungsoperator nach der  $j$ -ten Koordinate. Auch sei eine weitere Funktion  $g$  wie folgt gegeben:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(f(t,t), f(-t,t^2)).$$

Berechnen Sie den Wert der Ableitung  $g'(0)$ .

- (c) Bestimmen Sie den Wertebereich  $W(f)$  der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1+3+2 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) & g'(t) \\ -g'(t) & f'(t) \end{pmatrix} x(t)$$

Begründen Sie Ihre Wahl.

*Hinweis:* Die Matrix  $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  kann hilfreich sein.

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Im folgenden bezeichnet  $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  bzw.  $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$  die offene obere bzw. untere Halbebene in  $\mathbb{C}$ , und  $\overline{\mathbb{H}}_+ = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{R}$  und  $\overline{\mathbb{H}}_- = \mathbb{H}_- \cup \mathbb{R}$  deren Abschluss.

- (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Morera.
- (b) Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, deren Einschränkungen  $f|_{\mathbb{H}_+}$  und  $f|_{\mathbb{H}_-}$  auf die offene obere bzw. untere Halbebene holomorph sind.  
Beweisen Sie, dass  $f$  holomorph ist.
- (c) Formulieren Sie den Satz von Liouville für ganze holomorphe Funktionen.
- (d) Gegeben seien vier beschränkte stetige Funktionen  $G_+, H_+ : \overline{\mathbb{H}}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  und  $G_-, H_- : \overline{\mathbb{H}}_- \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Einschränkungen  $G_+|_{\mathbb{H}_+}$ ,  $H_+|_{\mathbb{H}_+}$  und  $G_-|_{\mathbb{H}_-}$ ,  $H_-|_{\mathbb{H}_-}$  auf die obere bzw. untere offene Halbebene holomorph sind. Es gelte  $G_+(x) - G_-(x) = H_+(x) - H_-(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie, dass es eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$  gibt, so dass  $G_+ = H_+ + c$  und  $G_- = H_- + c$  gilt.

(1+2+1+2 Punkte)