Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

(a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n.$$

(c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x,y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x,y))$ und $h(x,y) := e^{u(x,y)} \sin(v(x,y))$, für $x + iy \in \Omega$, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6).$$

(b) Sei $b > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}.$$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.
Hinweis: Betrachten Sie für $R > 0$ das Kurvenintegral $\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\, dz$, wobei γ_R der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm R + 0i$ und $\pm R + bi$ ist.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei das ebene autonome System

$$x' = x^2y + 3y =: f(x,y)$$

$$y' = -xy^2 - 3x =: g(x,y).$$

Man zeige:

(a) Der Nullpunkt ist die einzige Ruhelage des Systems.

(b) Das System ist ein Hamiltonsches System; d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial H}{\partial x} = -g$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = f$.

(c) H ist konstant auf den Lösungen des Systems; d.h. für jede Lösung φ gilt $H \circ \varphi = \text{const}$.

(d) Jede Lösung φ ist beschränkt.

(e) Jede maximale (d.h. nicht fortsetzbare) Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(f) Die Nulllösung ist stabil, aber nicht attraktiv.

(1+1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2}{1+t^2}, \qquad x(0) = c,$$

wobei $c > 0$ ein positiver Parameter ist.

(a) Man zeige: Ist I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, so hat φ keine Nullstelle.

(b) Man finde ein offenes Intervall $I \ni 0$ und eine Lösung $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$.

(c) Man setze φ_c zu einer maximalen Lösung $\widetilde{\varphi}_c :]t^-(c), t^+(c)[\to \mathbb{R}$ fort. Wie lauten die Entweichzeiten $t^-(c)$ und $t^+(c)$ und wie verhält sich $\widetilde{\varphi}_c(t)$ für $t \to t^-(c)$ und $t \to t^+(c)$?

(2+2+2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben seien die offene Menge

$$M = \{(s,t,u) |\ 0 < s < t < 2\pi,\ 0 < u < 2\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}^3, \quad f(s,t,u) = (us\cos t, us\sin t, us + ut),$$

der Wertebereich von f

$$G = \{f(s,t,u) |\ 0 < s < t < 2\pi,\ 0 < u < 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Schraubenfläche

$$S = \{f(s,t,1) |\ 0 < s < t < 2\pi\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : M \to G$ ein Diffeomorphismus ist, also stetig differenzierbar und bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

(b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Schraubenfläche S.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Gebiets G.

(1+3+2 Punkte)