Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

Aufgabe 2: (1+1+2+2 Punkte)

Es sei $\alpha > 0$ ein gegebener Parameter. Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

1. Jede Funktion f_n ist stetig.
2. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
3. Falls $\alpha < 1/2$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.
   Hinweis: Es gilt $|\sin z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
4. Falls $\alpha \geq 1$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 6\pi\}$$

sowie

$$T := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : r > 0,\ -\tfrac{\pi}{4} < \varphi < \tfrac{\pi}{4}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $\varphi : S \to T$ an mit

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} \varphi(z) = \infty.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$, eine stetige Funktion, die bezüglich der Koordinate x Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = f(t,x)$$

genau dann autonom ist (d.h. $f(t,x)$ ist von t unabhängig), wenn mit jeder Lösung $\varphi \; :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung und jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_\gamma :]a-\gamma, b-\gamma[\to \mathbb{R}^n$, $\varphi_\gamma(t) = \varphi(t+\gamma)$, eine Lösung ist.

Aufgabe 5: (2+1+3 Punkte)

(a) Gegeben sei ein autonomes Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die $f(0) = 0$ erfüllt.

  (i) Definieren Sie den Begriff der asymptotischen Stabilität der stationären Lösung 0 des Systems.

  (ii) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der stationären Lösung 0 an, welches die totale Ableitung $\mathrm{D}f(0)$ von f in 0 verwendet.

(b) Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung 0 des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2(1 - e^{x_1}) - 3x_2 + x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.