Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: (2+4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in U$ gelte $|f(z)| \leq |z - z_0|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Zeigen Sie $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) = 0$.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(z) = x^2 + \lambda y^2$ für $z = x + iy$. Bestimmen Sie alle λ, für die u Realteil einer ganzen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.
Geben Sie für diese λ alle zugehörigen ganzen Funktionen an.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f im Komplexen den Typ und berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=4} f(z)dz$ für

a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{e^z - e^\pi}$, b) $f(z) = \sin(e^{1/z})$.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \qquad y(0) = -1.$$

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: (1+1+4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos(y + x^3) \\ e^x \sin(y + x^3) \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass F beliebig oft differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}F$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$\Omega := \left\{ F(x,y) \,\middle|\, 0 \leq y \leq x \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)
Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$x' = -x^3 + 2x^2y - xy^2,$$

$$y' = -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4.$$

Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.