Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

Aufgabe 1:
Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f :& D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y < 0\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \\ & f(x,y) := (y+1)e^x - e^y \end{aligned}$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte oder Randpunkte von D sind. Ist D offen oder abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie Gradienten und Hessematrix von f in allen inneren Punkten von D.

c) Welcher Punkt im Innern von D ist eine lokale Extremalstelle von f und von welchem Typ ist er? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher Randpunkt ist eine lokale Extremalstelle von f? Begründen Sie Ihre Antwort.

(1+2+1+2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = e^{2x}.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie mit einem geeigneten Ansatz eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie damit die allgemeine Lösung an.

c) Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1. \tag{3}$$

a) Wir betrachten die Picard-Iteration mit der Startfunktion $y_0(x) = 1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die n-te Iterierte die Gestalt

$$y_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n + x^{n+1} r_n(x)$$

besitzt, wobei r_n ein Polynom ist. Finden Sie damit eine Potenzreihe, die (3) löst.

b) In welchem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (3). Auf welchem Intervall ist sie definiert?

(4+1+1 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass es keine biholomorphe Abbildung

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ gibt.

b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \Omega \to \Omega$, die der Gleichung $f \circ f = f$ genügen.

(3+3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi\}$$

betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{(z + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos z}.$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f in Ω und geben Sie jeweils den Typ an.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Polstellen.

c) Hat die Funktion f eine Stammfunktion?

d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $f(z) + c\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Begründen Sie jeweils alle Antworten auf die Teilaufgaben.

(1+2+1+2 Punkte)