Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:
Gegeben sei die parameterabhängige Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^\alpha \text{ mit } x(0) = 1.$$

Bestimmen Sie die maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A_a x$ mit der reellen 3×3-Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$

wobei a ein reeller Parameter ist. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die es eine nichttriviale Lösung $x(t)$ gibt mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

Aufgabe 3:
Sei $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{a^2+x^2}$.

a) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$. (2 Punkte)

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

(4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

  i) Zeigen Sie, dass $\partial f(G) \subset f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet ∂A den Rand $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{C}$.) (2 Punkte)

  ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial f(G) \subsetneq f(\partial G)$. (2 Punkte)

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial f(G) \not\subset f(\partial G)$. (2 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) \mid f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.