Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| < 1\}$$

an.
Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.

Aufgabe 2:
Benutzen Sie den Residuensatz, um das uneigentliche reelle Integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(x)}{x^2 + c^2} dx$$

für $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, zu berechnen. Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, dass die Werte der entsprechenden Kurvenintegrale gegen das gesuchte Integral konvergieren.

Aufgabe 3:
Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, und in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gelte $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $D^2 f(\mathbf{x}_0) = 0$. Dann hat f kein lokales Extremum in $\mathbf{x}_0$. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie das Vektorfeld $F(\mathbf{x}) = (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3})^T$ auf $\mathbb{R}^3$. Das Kurvenintegral über F ist wegunabhängig. (2 Punkte)

c) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei beschränkt längs der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid z = t(1+i), t \in \mathbb{R}\}$. Dann ist f konstant. (2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t^2 \sqrt{1+2y}.$$

a) Geben Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ an. Warum ist sie dort eindeutig? (4 Punkte)

b) Betrachten Sie die o.g. Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -1/2$. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an. (2 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $W(y) := |y|^{-12} - 2|y|^{-6}$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}u(x) + W'(u(x)) &= 0, \\ u(0) &= u_0, \\ \frac{du}{dx}(0) &= 0 \end{aligned}$$

zu beliebigen reellen Zahlen $u_0 \neq 0$.

a) Skizzieren Sie $W(\cdot)$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass

$$L(u) := \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + W(u)$$

eine Erhaltungsgröße ist.

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige reelle Zahlen $u_0 \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und dass Lösungen ihr Vorzeichen nicht wechseln. (4 Punkte)