Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 2 - 5 sind alle Rechnungen und Schlussfolgerungen mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:
Konstruieren Sie jeweils eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften oder begründen Sie, warum es eine solche Funktion nicht geben kann.

a) f bildet $\mathbb{C}$ auf die offene Kreisscheibe $D = \{u + iv : (u-1)^2 + v^2 < 4\}$ ab.

b) $f(z) = 0$ gilt genau für $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) f erfüllt $f(0) = 2$ und $|f(z)| \leq 1$ für $|z| = 1$.

Aufgabe 2:
Zwei Funktionen f und g seien in einer Umgebung eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Beweisen Sie, dass dann

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

ist. Berechnen Sie unter Benutzung dieses Ergebnisses das Integral

$$I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z}\, dz.$$

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \text{ oder } y \geq x^2, \\ 1 & \text{für } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ unstetig ist, aber dort sämtliche Richtungsableitungen existieren.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $x = x(t)$ des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = v$ genügt, und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 5:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xyy' = x^2 + y^2, \qquad y(1) = 1$$

auf dem ersten Quadranten $Q = \{(x, y) : x, y > 0\}$. Geben Sie auch den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.