

**Thema Nr. 3**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

*Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!*

**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie jeweils für  $\omega_0 = 1$  und  $\omega_0 = \sqrt{2}$  die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2y = 2 \cos \omega_0 t .$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

- a) Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.  
b) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = |y|^\alpha, \quad y(0) = 0$$

genau im Fall  $\alpha \geq 1$  eine eindeutige Lösung auf  $[0, \infty)$  besitzt.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Berechnen Sie die (lokale) Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1-t^2} & 1 \\ 0 & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} y$$

jeweils zum Anfangswert

- a)  $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   
b)  $y(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 - i} dx \quad (i = \sqrt{-1}).$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**Mit  $z_0 = 1 + i$  sei folgende rationale Funktion definiert:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z_0-z)^3} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1, z_0\}).$$

Bestimmen Sie (am einfachsten mit Hilfe der geometrischen Reihe) jeweils die Laurent-Reihen von  $f$  um  $z = z_0$  bzw. um  $z = 1$  mit ihren maximalen Konvergenzringen. Geben Sie jeweils die Hauptteile der Reihen an.

(6 Punkte)