Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{10}{x^2}y = 0$$

alle reellen Lösungen $y(x)$ auf dem Intervall $]0,\infty[$. Benutzen Sie dazu die Substitution $y(x) = z(\ln x)$ mit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder eine andere Methode Ihrer Wahl. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f, g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

i) $f\left(\frac{1}{n^{2011}}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^{2011}} \in \Omega$, aber $f \not\equiv 0$.

ii) $g^{(k)}(0) = (k!)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

iii) $h\left(\frac{1}{2n}\right) = h\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \in \Omega$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $F(x,t) = \mathrm{e}^{x^2t^2} + t^2$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von F.

b) Bestimmen Sie zu $x_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen von

$$xt^2x' + t(x^2 + \mathrm{e}^{-x^2t^2}) = 0\,, \quad x(1) = x_0\,.$$

c) Zeigen Sie, dass jede Lösung aus (b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert, und geben Sie das Randverhalten der Lösungen an.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Sei $f(z) = e^{iz}(z^2+1)^{-2}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $z \notin \{i, -i\}$.

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularitäten i und $-i$ der Funktion $f(z)$, und geben Sie das zugehörige Residuum an.

b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)(x^2+1)^{-2}dx$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\gamma = \sup_{t \geq 0} \int_0^t p(s)ds \in \mathbb{R}\,.$$

a) Berechnen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösungen $x(t)$ des Anfangswertproblems $x'(t) = p(t)e^{x(t)}$ für $t > 0$ mit $x(0) = x_0$.

b) Beweisen Sie: Ist $1 > \gamma e^{x_0}$, so existiert die Lösung in (a) für alle Zeiten $t > 0$.

(6 Punkte)