Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $G_* := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \overline{z} \in G\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_* : G_* \to \mathbb{C}\,, \quad f_*(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

ebenfalls holomorph ist.

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = ax^2 + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1}\, dz$ für $R > 0$, wobei $|z-1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Sei $h(z)$ in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und sei eine meromorphe Funktion F durch $F(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ gegeben. Berechnen Sie das Residuum von F in z_0.

b) Klassifizieren Sie für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} \quad \text{und} \quad g(z) = \exp\left(\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right)$$

alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$.

c) Berechnen Sie mit der Funktion f aus (b) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^{y(t)}\,t^3\,, \quad y(0) = y_0\,.$$

Gibt es Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert?

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) - 3y(t) = t\,e^{4t}\,, \quad y(1) = 2\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \sin(y(t)) = 0\,, \quad t \geq 0\,,$$

wobei $\varepsilon > 0$.

a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System erster Ordnung der Form $v'(t) = f(v(t))$ für den Vektor $v = (y, y')$.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems aus (a).

c) Untersuchen Sie die kritischen Punkte auf Stabilität und Instabilität.

(6 Punkte)