Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Im Folgenden bezeichne $U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ und $\mathbb{D} := U_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe.

Widerlegen oder beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei $z_0 = 0$ eine zweifache Polstelle der in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion f. Dann gilt $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$. (Hierbei bezeichnet $\operatorname{res}_{z_0} f$ das Residuum von f im Punkt z_0.)

b) Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $g = \operatorname{Re}(f) + \operatorname{Im}(f)$ konstant, so ist f selbst konstant.

c) Es sei $f : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Dann gibt es für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t,x)$, $x(0) = x_0$, die auf dem Intervall $(-1,1)$ definiert ist, d.h. $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

d) Jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = e^{15t}\cos(x(t)^7)$ kann auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$, und es seien f und g biholomorphe Abildungen von Ω auf sich selbst mit $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie $f = g$.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Es sei $P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_n \neq 0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $m \in \{1, \ldots, n\}$. Für ein $r > 0$ gelte

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot r^k < 2|a_m| \cdot r^m.$$

Zeigen Sie, dass P genau m Nullstellen in $U_r(0)$ und genau $n - m$ Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(0)}$ hat (jeweils mit Vielfachheiten gezählt). Belegen Sie durch ein Beispiel, dass dies i. Allg. falsch ist, wenn man nur $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot r^k \leq 2|a_m| \cdot r^m$ voraussetzt.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i} dz$$

gilt. (Hinweis: Wenden Sie (a) an.)

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y + 2y^3 \\ \dot{y} &= -4x \end{aligned}$$

und zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(x^*, y^*) = (0, 0)$ sowohl durch Untersuchung der Linearisierung in (x^*, y^*) als auch durch Verwendung der Lyapunov-Funktion

$$V(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + y^4.$$

(6 Punkte)